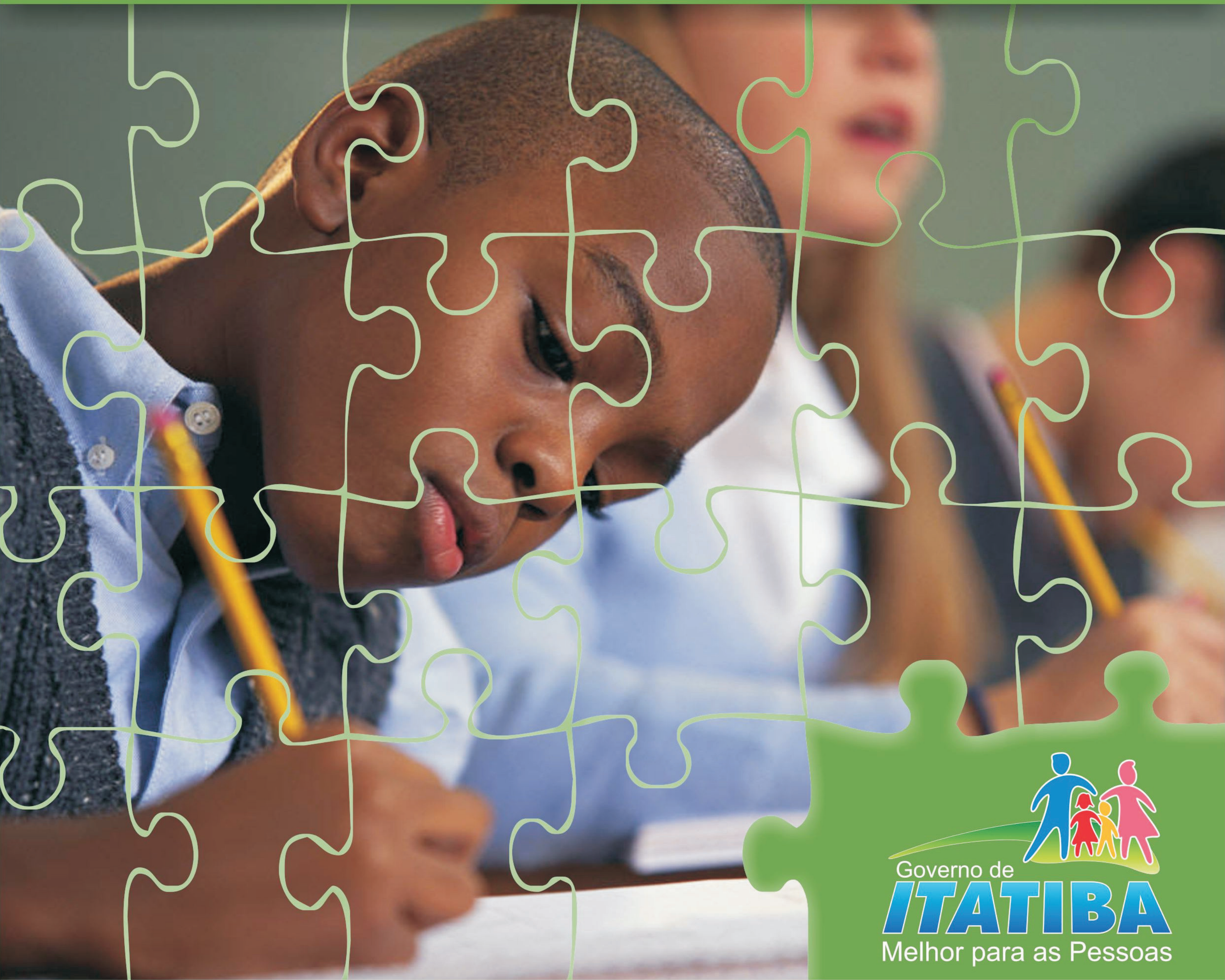
Secretaria da Educação

Coletânea de Matemática



Governo de ITATIBA
Melhor para as Pessoas

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta Coletânea de Matemática tem como finalidade contribuir para a formação dos professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, visando à melhoria da aprendizagem dos alunos na área de Matemática.

Desde o ano de 2010, a Secretaria Municipal de Educação de Itatiba vem proporcionando momentos de discussão sobre o ensino da matemática, de forma a viabilizar diversos fazeres. Dentre eles, destacam-se: levantar; testar e validar hipóteses/conjecturas; buscar exemplos e contraexemplos; estimar e calcular; resolver problemas; estabelecer relações; sistematizar; observar regularidades e padrões; utilizar a imaginação e intuição; coletar, organizar e analisar dados e informações; observar/transformar/organizar espaço e formas; registrar e analisar estratégias e procedimentos. Esses momentos aconteceram com todos os professores dos ciclos I e II em 2010 e, em 2011 e 2012, com os coordenadores pedagógicos que, em sua função de formadores de professores, tiveram a tarefa de multiplicar a aprendizagem adquirida em suas unidades escolares.

A presente coletânea foi organizada com os textos discutidos na formação de coordenadores pedagógicos no ano de 2012, oferecido pela Rede Municipal de Ensino de Itatiba, sob orientação da Prof.ª D.ra Adair Mendes Nacarato, da Universidade São Francisco.

Durante esses encontros, os coordenadores tiveram a oportunidade de refletir sobre a forma de utilização de materiais manipuláveis, o trabalho com agrupamentos de diferentes bases, algumas possibilidades de cálculo mental, as ideias da multiplicação, a estratégias de resolução de problemas, o uso do material cuisenaire e da calculadora, bem como, analisar diversas propostas de sequências a serem desenvolvidas em sala de aula.

Portanto, esse material é a sistematização desse processo formativo, contribuindo no planejamento das aulas e no avanço das reflexões sobre a Educação Matemática em nosso município.

Secretaria de Educação
Equipe Pedagógica do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – Ano 9, Nos. 9-10 (2004-2005), 1-6

EU TRABALHO PRIMEIRO NO CONCRETO

Adair Mendes Nacarato

Quem de nós, formadores de professores da Educação Infantil e das séries iniciais do Ensino Fundamental, já não ouviu ou leu afirmações desse tipo? Nos últimos anos parece haver disseminado entre os professores polivalentes um discurso que enaltece a importância de se trabalhar com o 'concreto' para se ensinar Matemática. Quando nos propomos a entender o que está por trás desse discurso, descobrimos que, na verdade, esse 'concreto' refere-se ao uso de materiais manipuláveis. Em contrapartida, o discurso da maioria dos professores especialistas pauta-se na pouca ou nenhuma valorização do uso de materiais manipuláveis para se ensinar Matemática, sendo tal uso considerado como perda de tempo.

Qual posição assumir? É importante utilizar materiais manipuláveis em sala de aula? De que tipo? Em quais conteúdos?

Não há como desconsiderar que o incentivo à utilização de materiais manipuláveis se faz presente na maioria dos atuais livros didáticos e, talvez, em decorrência disso, o professor venha incorporando um discurso sobre a sua importância. Mas de que forma os livros didáticos incentivam tal utilização? Quais materiais são os mais comumente utilizados? Esse incentivo aparece em todas as séries ou é preponderante nas séries iniciais?

Evidentemente não tenho a pretensão de responder a todas as questões. Quero apenas trazer alguns elementos para reflexão, tomando como referência minha experiência de 18 anos como professora da Educação Básica e de 17 anos atuando como formadora de professores.

O que é possível constatar nesse contexto é que há poucas discussões sobre o assunto. Atuando como formadora de professores, em processos de formação continuada ou como professora de Metodologia do Ensino de Matemática no curso de Pedagogia e de Didática no curso de Licenciatura em Matemática, ao buscar subsídios teóricos para uma reflexão e problematização com os professores e graduandos, tenho constatado a pouca existência de discussões teóricas na área de Educação Matemática. Seria então uma temática já superada e, portanto, não mereceria 'perda' de tempo no investimento em pesquisas sobre a forma como os autores de materiais didáticos, os formadores e os professores vêm concebendo a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula?

Essa discussão se fez presente no início dos anos de 1990. Naquela época já se discutia sobre o mito do material manipulável, ou seja, a crença de que "a manipulação de material concreto garantiria a aprendizagem da matemática" (SCHLIEMANN; SANTOS e COSTA, 1992, p. 99). Em seus estudos, essas autoras apontavam que o material concreto, da forma como utilizado pelos professores em nada estava contribuindo para uma melhor Educação Matemática. Discussões como essa ocorreram há mais de uma década, mas, no entanto, os professores continuam acreditando nos 'milagres' do material concreto.

Uma breve contextualização do uso de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática

O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920. Esse período foi marcado pelo surgimento de uma tendência no ensino de Matemática que ficou conhecida como *empírico-ativista*, decorrente dos ideais escolanovistas que se contrapunham ao modelo tradicional de ensino no qual o professor era tido como elemento central do processo de ensino. Segundo Fiorentini (1995), na concepção empírico-ativista o aluno passa a ser considerado o centro do processo e os métodos de ensino – tendo como pressupostos a descoberta e o princípio de que 'aprende-se a fazer fazendo' – se pautavam em atividades, valorizando a ação, a manipulação e a experimentação. O ensino seria baseado em atividades desencadeadas pelo uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais.

No entanto, esses ideais em nada influenciaram o ensino de Matemática, naquela época, quer pelo despreparo dos professores, quer pelas poucas inovações que foram introduzidas pelos livros didáticos.

TEXTO 1

Esse ideário empírico-ativista, segundo Fiorentini (1995) é retomado, com certa força, a partir da década de 1970, em decorrência de uma discussão mundial pautada pelos questionamentos ao Movimento da Matemática Moderna, cujo fracasso se evidenciava. Assiste-se, assim, a um grande movimento nacional de produção de novos materiais para o ensino de Matemática. Muitos grupos são constituídos ou alguns constituídos anteriormente, durante o movimento modernista, acabaram produzindo vários materiais, principalmente nos finais dos anos de 1970[2] e início dos anos de 1980. Muitas das discussões que ocorriam no interior desses grupos foram incorporadas pelos autores de livros didáticos e paradidáticos. No caso do estado de São Paulo, houve um investimento muito grande da Secretaria da Educação na produção de materiais didáticos – como Atividades Matemáticas, por exemplo – e documentos curriculares – subsídios e propostas.

Paralelamente a esse movimento de produção e divulgação de novos materiais, há todo o incentivo governamental quanto ao livro didático. Em 1968, durante o Regime Militar, foi criada a Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME), que passa a assumir a coordenação e distribuição do livro didático a estudantes de baixa renda. Inicia-se a era dos livros descartáveis. Mas, é a partir de 1980, que se constata uma proliferação de títulos de livros didáticos e, considerando as condições de trabalho do professor, que já vinha num processo de intensificação de suas atividades (baixos salário e, conseqüentemente, aumento de jornadas de trabalho para sobrevivência), o livro didático como afirmam Freitag, Costa e Motta, (1997, p. 108), "não serve aos professores como simples fio condutor de seus trabalhos, mas passa a assumir o caráter de "critério de verdade" e "última palavra" sobre o assunto".

Nesse movimento de produção não há como desconsiderar as contribuições advindas, principalmente, da área de Psicologia. Post (1981)[3] destaca as contribuições de Piaget, Bruner e Dienes para o caso da Matemática. Para o autor:

> *Talvez a proposição mais importante que o professor pode tirar do trabalho de Piaget e seu uso na classe é que as crianças, especialmente as mais novas, aprendem melhor com atividade concreta. Essa proposição, se acompanhada de sua conclusão lógica, alteraria substancialmente o papel do professor de expositor a auxiliar, aquele que propicia e orienta a manipulação e a interação das crianças com os vários aspectos do meio ambiente.(POST, 1981, p. 6)*

Ainda, segundo o autor, Dienes e Bruner se apoiaram nas idéias de Piaget, mas trouxeram contribuições próprias. Dienes – que talvez tenha sido o pesquisador que maiores contribuições e influências tenha exercido nos anos de 1970 quanto ao uso de materiais didáticos – dedicou-se a estudar e propor atividades e materiais para o ensino de Matemática. Tinha como princípio de que a experiência deveria preceder a análise, ou seja, as experiências cuidadosamente escolhidas pelo professor sustentariam o fundamento sobre o qual estaria baseado o aprendizado matemático. Bruner, ao propor um modelo de instrução[4], com forte ênfase na necessidade de interação direta do aluno com o meio ambiente, afirma: "o que é mais importante para ensinar um conceito básico é que a criança seja ajudada a passar gradativamente do pensamento concreto à utilização de métodos de pensar mais adequados conceitualmente" (1960, apud POST, 1981, p.11).

As contribuições desses autores, bem como de outros estudos provindos da Psicologia Cognitiva, sem dúvida, influenciaram fortemente as produções curriculares nas décadas de 1970 e 1980 e, conseqüentemente, foram incorporadas pelos materiais didáticos destinados ao professor. A tendência construtivista passa a ser muito forte no ensino de Matemática – pelo menos em nível de discurso e, muitas vezes, com leituras totalmente equivocadas.

A partir dos anos de 1990 vários recursos didáticos vêm sendo sugeridos para o ensino de Matemática. Além dos materiais manipuláveis, destaca-se também o uso de calculadoras e de computador – embora esses recursos ainda estejam bastante distantes da maioria das salas de aula.

A ampliação da comunidade de educadores matemáticos e as produções na área vêm apontando outras tendências para o ensino de Matemática e, provavelmente, em decorrência disso, a discussão sobre a importância ou não da utilização de materiais manipuláveis tenha ficado em um plano secundário. A ênfase vem sendo posta em outras questões, como por exemplo: resolução de problemas, o uso de jogos, trabalho com projetos, a interdisciplinaridade, a contextualização, os processos de significação para a aprendizagem matemática, a Modelagem Matemática, as questões culturais, o uso da história, as investigações matemáticas, dentre outras. No entanto, o professor em sua prática de sala de aula, na maioria das vezes, contando apenas com o livro didático como suporte para o seu trabalho depara, cada vez mais, com livros repletos de desenhos de materiais manipuláveis – a maioria deles não disponíveis nas escolas ou quando existentes, não são utilizados ou por desconhecimento em como lidar com eles ou por faltas de condições de trabalho (classes superlotadas, principalmente). Os sentimentos de impotência e os conflitos vividos pelos professores, preocupados que estão com a aprendizagem de seus alunos, acabam se explicitando nos cursos de formação que freqüentam. Muitas vezes, incorporam um discurso a favor do 'concreto', sem uma reflexão do que seria concreto em Matemática. Assim, frases como a que usei no título deste artigo ou outras como as destacadas a seguir, proferidas por professoras polivalentes [5] são freqüentes.

TEXTO 1

Elas (as crianças) têm a necessidade de perceberem e sentir de forma concreta o que está ocorrendo com a posição dos números.

As crianças vão visualizando os algarismos, mas não é significativo para elas, pois precisam manusear estas quantidades de números, construir os conceitos matemáticos.

Assim, o grande dilema que venho enfrentando como formadora de professores diz respeito ao como superar essa visão empírica de ensino de Matemática, respeitando o saber docente desses professores, mas problematizando-o de forma que possam construir uma visão mais crítica sobre a utilização de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática.

Pretendo destacar, a seguir, as possibilidades e limites desses materiais que vêm se fazendo presente nas práticas escolares de Matemática.

Materiais manipuláveis para o ensino de Matemática: facilitador ou complicador?

Vou me apropriar da definição dada por Reys (1971, apud MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 193) para materiais manipuláveis: "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma idéia".

Um dos elementos que dificultam a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados. Para Matos e Serrazina (1996, p. 194), muitos materiais são utilizados pelos professores porque na visão deles – adultos e professores – tais materiais têm relações explícitas com o conceito. "Contudo, não há nenhuma garantia que os alunos vejam as mesmas relações nos materiais que vemos". Os autores apontam ainda duas características das atividades envolvendo materiais concretos que podem trazer resultados negativos: 1) a distância entre o material concreto e as relações matemáticas a serem representadas; 2) o material "toma as características de um símbolo arbitrário em vez de uma concretização natural" (Hiebert e Carpenter, 1992, apud MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 197); e 2). Muitas vezes, segundo os autores, os professores utilizam os materiais para introduzir uma noção, mas, uma vez se chegando a ela (cálculo, propriedade, algoritmo), já não interessa o contexto no qual o material foi utilizado e passa-se a trabalhar apenas no nível abstrato. Nesse sentido, afirmam os autores:

É como se a situação que serviu para os introduzir funcionasse como um andaime que se retira quando se acaba o prédio. Não queremos com isto dizer que se tenha de estar sempre a trabalhar com materiais, mas que as concretizações que serviram para elaborar as noções matemáticas podem ser situações importantes para os alunos verificarem algumas propriedades ou compreenderem outras. Isto só se consegue se, desde o início, houver uma verdadeira acção por parte da criança e não uma simples reprodução do que foi dito pelo professor. (MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 197-198)

Vou considerar, como exemplo, dois materiais estruturados bastante utilizados nas salas de aula de Matemática: o material dourado e a escala Cuisenaire. No caso do material dourado – também conhecido como material Montessori ou multibase 10 – este vem sendo amplamente representado nos livros didáticos, principalmente de 1ª a 4ª série e é indicado para se trabalhar o sistema de numeração decimal e o valor posicional. Por ser um material estruturado – manter um isomorfismo com as propriedades do sistema de base 10 – sua utilização restringe-se aos conceitos relacionados ao sistema decimal. No entanto, esse é um tipo de material que só fará significado ao aluno se houver, como destacam Matos e Serrazina (1996, p. 196), uma interpretação dessas relações, bem como a possibilidade de uma interação dos estudantes com o material, pois

ao interaccionar com os materiais e com os outros sobre os materiais, é mais provável que os alunos construam as relações que o professor tem em mente. De facto, a linguagem usada para conversar com os outros sobre os materiais pode ser crucial para os alunos na construção de relações.

O que tenho observado tanto em algumas práticas de professores quanto em alguns livros didáticos é o uso bastante equivocado do material. Destacarei alguns desses equívocos: total falta de interação dos alunos com o material no sentido de perceber quais as relações entre as suas peças; solicitação ao aluno para que faça a representação – via desenho – de quantidades usando as peças do material. Assim, o aluno perde um longo tempo desenhando os cubinhos, barras e placas do material. Ou ainda, o fato de o livro trazer a representação – por meio do desenho – do cubinho, por exemplo, como sendo bidimensional (representação de um quadrado) e continuar a chamá-lo de 'cubo'. No que diz respeito às operações com números naturais, raramente há registros que possibilitem ao aluno relacionar as ações realizadas no material e o algoritmo que se está introduzindo. Serrazina (1999) relata um episódio bastante comum também com professoras brasileiras: usar o material dourado para que a criança compreenda os mecanismos de trocas e 'destrocas' para o algoritmo da subtração; no entanto, no momento de formalização do mesmo, acaba-se introduzindo o algoritmo da compensação, desconsiderando que as lógicas dos dois algoritmos são diferentes.

No caso da escala Cuisenaire – também conhecido como material ou barras Cuisenaire – é um material também

TEXTO 1

estruturado que consiste de 10 barras coloridas, variando o comprimento em 1 unidade. Como afirma Mansutti (1993, p. 24), ao destacar esse material:

> *Em sua concepção original, trata o número relacionado à idéia de medida a partir da representação com grandezas contínuas; explora as relações de dobro e triplo entre números de 1 a 10 e propõe um interessante trabalho sobre a produção de escrita com números e letras. Essas possibilidades quase nunca são exploradas, certamente por serem desconhecidas daqueles que o utilizam.*

A essas possibilidades do material Cuisenaire acrescento ainda o trabalho com frações e volumes. Por ser um material que representa grandezas contínuas, ele possibilita explorar a fração em seu significado de medida, bem como a representação dos algoritmos das operações com frações e, no caso de volume, é possível, com o uso das peças compor e decompor poliedros convexos e não-convexos de diversos volumes. No entanto, muitas dessas potencialidades do material são desconhecidas dos professores que as reduzem apenas ao trabalho com numeração na Educação Infantil e 1ª série do Ensino Fundamental.

Um uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los.

No caso da Geometria, há vários materiais sugeridos e utilizados pelos professores, como: conjunto de sólidos geométricos, tangram, geoplano e poliminós. Em momento algum, questiono a utilização desses materiais; pelo contrário, considero-a fundamental em todas as séries e níveis de ensino, uma vez que podem contribuir para o desenvolvimento da visualização. Estudos na área da Geometria apontam a importância dos processos de visualização.

> *A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (NACARATO e PASSOS, 2003, p. 78)*

O desenvolvimento dos processos de visualização depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais.

Pode-se situar o início da grande ênfase na utilização de materiais manipuláveis no ensino de Geometria na década de 1980, quando se constata a existência de um movimento nacional de resgate desse ensino que, de certa forma, ficou bastante ausente das salas de aula durante o período do Movimento da Matemática Moderna. Como aponta Andrade (2004, p. 199), o retorno a um enfoque empírico-ativista no ensino de Geometria pode "ter sido uma forma de motivação para que a mesma voltasse aos currículos em sala de aula".

Concordo com Pais (2000, p.14) quando este, ao discutir a utilização dos recursos didáticos no ensino da Geometria, destaca a existência de duas posturas redutoras dos valores educativos dessa área do conhecimento:

> *uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de idéias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos.*

Tanto os estudos de Pais (2000), quanto os de Andrade (2004) apontam para um movimento de superação dessa tendência mais ativista para uma que aborda a Geometria de forma mais exploratória e num movimento dialético entre a experimentação e a conceitualização/abstração. Em um trabalho anterior, Pais (1996) analisa a epistemologia do pensamento geométrico, destacando quatro elementos essenciais: objeto real (modelos) – que dá o suporte de materialidade e funciona como uma representação dos conceitos geométricos; desenhos – constituem uma segunda forma de representação, com complexidade maior que os modelos, pois exigem interpretação para o seu significado; imagens mentais – que são estimuladas pelos objetos e desenhos e estão mais próximas da abstração; e, finalmente, os conceitos de natureza geral e abstrata.

Essa análise do autor, de certa forma, reforça a importância dos modelos e desenhos no ensino de Geometria. Talvez, em decorrência desse fato, haja tanto desenho e sugestões de materiais manipuláveis nos atuais livros didáticos. No entanto, o risco existente, como apontado por Pais (2000), reside na forma como esses desenhos são utilizados, ou seja, apresentam-se numa configuração particular, como por exemplo, o quadrado ser desenhado com os seus lados paralelos às margens do papel, dificultando a construção de outras imagens mentais no aluno que o deixa de considerar como quadrado se estiver em outra posição. Nesse sentido, o uso de materiais manipuláveis como as peças do tangram, por exemplo, possibilitam diferentes rotações, composições e decomposições, ampliando o repertório de representações possíveis não apenas para a do quadrado, como também para a de outros polígonos. Mas, novamente um alerta do autor: o risco da 'inversão didática'. A inversão "ocorre quando

TEXTO 1

o material passa a ser utilizado como uma finalidade em si mesmo em vez de ser um instrumento para a aquisição de um conhecimento específico" (PAIS, 2000, p.5). Para exemplificar, o autor cita o tangram e o geoplano quando estes "são indevidamente tratados como objetos de estudo em si mesmo em detrimento da ênfase aos conceitos geométricos correspondentes" (Ibidem, p. 6).

Então qual seria o caminho pedagógico para o uso de materiais didáticos no ensino de Geometria? Novamente partilho do pensamento de Pais (2000) quando este afirma:

> *O uso de materiais didáticos no ensino de geometria deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica para que, evitando os riscos de permanência em um realismo ingênuo ou de um empirismo, contribua na construção do aspecto racional. Uma compreensão inicial pode induzir um aparente dualismo entre as condições concretas e particulares dos recursos didáticos em oposição às condições abstratas e gerais das noções geométricas. Mas esta dualidade não deve ser vista como pólos isolados do processo de construção conceitual, deve ser superada pela busca de um racionalismo aberto, dialogado e dialetizado. Em suma, devemos sempre estimular um constante vínculo entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno.(PAIS, 2000, p. 14-15).*

As posições destacadas acima reforçam o argumento de que não é o simples uso de materiais que possibilitará a elaboração conceitual por parte do aluno, mas a forma como esses materiais são utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos a partir deles. Reforçam também a importância da utilização de materiais, principalmente para o ensino de Geometria. Nesse sentido, é importante destacar que tenho constatado uma certa resistência do professor especialista – que atua de 5ª a 8ª série e Ensino Médio – na utilização até mesmo dos materiais que são sugeridos pelos livros didáticos adotados. Essa resistência talvez seja decorrente de uma não vivência – quer como estudantes, quer como licenciandos – com propostas didático-pedagógicas que incluam o uso de materiais didáticos.

O uso de materiais manipuláveis produzindo significados para o aluno

Espero que os argumentos até aqui utilizados tenham sido suficientes para uma reflexão sobre a importância da forma de utilização de materiais manipuláveis para o ensino de Matemática. Em momento algum critiquei ou defendi que não se devam usar materiais manipuláveis. Procurei chamar a atenção para alguns equívocos que podem ocorrer quando não se tem clareza das possibilidades e dos limites dos materiais utilizados.

Destaquei alguns materiais de maior utilização – por seus aspectos pedagógicos e/ou comerciais – principalmente, pelos autores de livros didáticos, embora saiba da existência de outros.

Nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática. Sua eficácia ou não dependerá da forma como o mesmo for utilizado. "Não é o uso específico do material concreto, mas, sim, o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático" (SCHLIEMANN; SANTOS; COSTA, 1992, p. 101).

Atualmente, a ênfase para o ensino de Matemática vem sendo posta nos processos de significação e, conseqüentemente, no significado matemático:

> *O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a idéia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo. Uma nova idéia é significativa na medida em que cada indivíduo é capaz de a ligar com os conhecimentos que já tem. As idéias matemáticas formarão conexões de alguma maneira, não apenas com outras idéias matemáticas como também com outros aspectos do conhecimento pessoal. Professores e alunos possuirão o seu próprio conjunto de significados, únicos para cada indivíduo. (BISHOP e GOFREE, 1986, apud PONTE* et al.*, 1997, p. 88)*

Há várias tendências didático-pedagógicas para se trabalhar em contextos de significação: projetos interdisciplinares, tarefas exploratórias e investigativas, resolução de problemas, Modelagem Matemática, tecnologias de informação, uso de jogos, de história, dentre outras. Nesses contextos, a utilização de materiais manipuláveis pode perpassar qualquer uma dessas tendências.

Não há como desconsiderar a complexidade da sala de aula, bem como a impossibilidade da adoção de uma única tendência para o ensino de Matemática. Assim, muitas vezes, o professor precisa utilizar uma diversidade de materiais, podendo transitar por diferentes tendências.

No caso do livro didático, é possível constatar que muitos deles – principalmente os das séries iniciais – vêm incentivando o uso de materiais manipuláveis, muito embora, na maioria das vezes, as orientações encontram-se no Manual do Professor e o livro se restringe a apresentar os desenhos de tais materiais. Compete assim, ao professor, incrementar ou não suas aulas com a utilização desses materiais. No entanto, minha experiência com professores vem revelando que poucos sabem fazer uso desses materiais estruturados e até mesmo nunca tiveram a oportunidade de manipulá-los. Limitam-se, muitas vezes, aos desenhos apresentados nos livros.

Se os materiais constituirão ou não uma "interface mediadora para facilitar na relação entre o professor, aluno e o conhecimento em um momento preciso da elaboração do saber" (PAIS, 2000, p.2-3) vai depender da forma como for utilizado, bem como das concepções pedagógicas do professor. Nesse sentido, entendo que o papel do formador de professores seja de trazer essas questões para reflexão, problematizando o uso de materiais didáticos nas aulas de Matemática e discutindo alguns significados do que seja 'trabalhar no concreto' com alunos da Educação Básica, em qualquer um de seus níveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, José Antonio Araújo. **O ensino de Geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos anais dos ENEM'S**. Dissertação (Mestrado em Educação). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2004, 252p.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, FE/Unicamp, Campinas, SP, Ano 3, número 4, novembro de 1995, p. 01-37.

FREITAG, Bárbara; COSTA WANDERLEY F.; MOTTA, Valéria R. **O livro didático em questão**. São Paulo: Cortez, 1993, 159p.

MATOS, José M.; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996, 304p.

MANSUTTI, Maria Amabile. Concepção e Produção de Materiais Instrucionais em Educação Matemática. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo: SBEM, Ano 1, Número 1, setembro de 1993, p. 17-29.

NACARATO, Adair M.; PASSOS, Cármen Lucia B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: EdUSFCar, 2003, 151p.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, FE/Unicamp, Campinas, SP, v.4, n. 6, jul./dez.1996, p. 65-74.

________. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf, 23ª Reunião, Caxambu, 2000.

PONTE *et al*. Didática da Matemática: Ensino Secundário. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do ensino secundário, 1997. 134p

POST, Thomas R. O Papel dos Materiais de Manipulação no aprendizado de conceitos matemáticos. In: LINDQUIST, Mary Montgomery **Selected Issues in Mathematics Education.** Tradução: Elenisa T. Curti e Maria do Carmo Mendonça, 1981. (Texto mimeo).

SCHLIEMANN, Analúcia Dias; SANTOS, Clara Melo dos; COSTA, Solange Canuto da. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In ALENCAR, Eunice Soriano de (Org.). **Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino e Aprendizagem.** São Paulo: Cortes, 1992, p.97-117.

SERRAZINA, Lurdes. Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. **Quadrante: Revista teórica e de investigação.** Lisboa, vol. 8, 1999, p. 139-167.

---

1. Universidade São Francisco; adamn@terra.com.br. Agradeço a Cármen Lúcia B.Passos, com quem tenho compartilhado as idéias aqui presentes, pela leitura e sugestões ao presente texto.
2. Destaca-se os materiais produzidos no Projeto PREMEM/MEC/IMECC-UNICAMP. Esse projeto, sob direção do Prof. Ubiratan D'Ambrosio e coordenação de Almerindo Marques Bastos, produziu alguns materiais didáticos para sala de aula.
3. Esse autor discute o papel dos materiais de manipulação no aprendizado da Matemática. No texto aqui utilizado, ele faz um panorama das pesquisas realizadas – até o final dos anos de 1970 – sobre o uso de materiais manipuláveis e as contribuições ou não para o aprendizado matemático.
4. Em sua obra "The process of Education" (1960).
5. Essas falas se fizeram presente na análise de um caso de ensino, no qual a docente, numa concepção empirista de ensino de Matemática, utilizava cartões com os algarismos de 0 a 9, para ensinar – por meio da composição dos algarismos dos cartões – o valor posicional.

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Adair Mendes Nacarato

O sistema de numeração decimal (SND) possui um conjunto de características e de símbolos que, associados, permitem representar qualquer número. São eles:

- O SND utiliza os 10 algarismos indo-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Esses algarismos são assim chamados, pois teriam sido criados pelos hindus e divulgados pelos árabes.
- O SND é decimal pelo fato de trabalhar com base 10: cada 10 unidades formam uma dezena; cada 10 dezenas formam uma centena, etc.
- Ele é aditivo e multiplicativo, ou seja, ele é polinomial. Por exemplo: $235 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 5 = 2 \times (10 \times 10) + 3 \times 10 + 5 \times 1 = 200 + 30 + 5 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.
- Ele é posicional, ou seja, o algarismo muda de valor dependendo da posição que ocupa no numeral. Exemplo: o 2 em 235 vale 200, enquanto que, em 325, vale 20. Daí os conceitos de valor relativo (valor que depende da posição que o algarismo ocupa no numeral) e valor absoluto (valor que independe da posição que o algarismo ocupa no numeral. Por exemplo, no numeral acima, o 3 tem valor absoluto 3 mesmo).
- A escrita de qualquer numeral é organizada em classes e ordens. As classes são infinitas: unidades simples, milhares, milhões, bilhões, trilhões, etc. Cada classe é formada por três ordens: unidades, dezenas e centenas.

Conceitualmente há diferença entre número, numeral e algarismo. O número é a ideia (quantidade ou medida); o numeral é o registro dessa ideia (por exemplo: cinco, 5, V na numeração romana); e o algarismo é o símbolo (por exemplo, o numeral 13 representa uma coleção com treze elementos e ele é formado de dois algarismos ou dígitos). No entanto, não há necessidade de fazer tal diferenciação com os alunos dos anos iniciais.

Como trabalhar com todas essas características do sistema de numeração decimal é o objetivo do ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. Uma das opções metodológicas possível refere-se ao trabalho com diferentes bases.

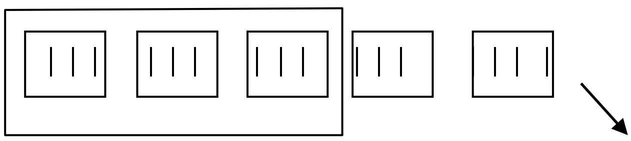
TEXTO 2

Agrupamentos em diferentes bases

O conceito de base é tão antigo quanto aos próprios sistemas de numeração da Antiguidade. Desde que o homem sentiu a necessidade de começar a agrupar para contar grandes quantidades, o conceito de base foi se tornando necessário: agrupar de 5 em 5, de 10 em 10, de 20 em 20, etc.

Assim, contar por agrupamentos passou a ser uma necessidade. Do ponto de vista pedagógico, é interessante também criar essa necessidade em sala de aula. Dessa forma, propomos um trabalho bastante intenso: primeiro com os agrupamentos em bases diferentes de 10 utilizando material de contagem; num momento posterior, introduzimos as trocas.

Optamos por essa sequência porque os agrupamentos são mais “concretos” para a criança pelo fato de conterem todas as unidades que foram agrupadas. Por exemplo, dispondo de 16 palitos e querendo agrupá-los de 3 em 3, temos 5 grupos de 3 palitos, e sobrará 1 palito. No entanto, se estamos agrupando de 3 em 3 (jogo do “Nunca 3”), é possível reagrupar os 5 grupos, formando 1 grupo maior (grupão), e sobrarão 2 grupinhos. O registro desse agrupamento será 121 (base 3) e lê-se: **um, dois, um** na base 3, e **nunca** cento e vinte e um, pois não se está trabalhando na base 10.



1 grupão 2 grupinhos 1 palito solto

Se a criança fez esse agrupamento utilizando palitos, ela poderá utilizar a contagem para perceber que, em cada grupinho (que chamaremos feixinho), há 3 palitos e que, em cada grupo maior (que chamaremos feixão), há 3 feixinhos, ou seja, em um feixão há 3 feixinhos de 3 palitos cada um. Se desde o início essas ideias forem bem exploradas, ao se chegar à base 10, a criança compreenderá que em 100 há 10 grupos de 10, ou seja, em uma centena há 10 dezenas.

Somente após a compreensão dos agrupamentos é que introduzimos o mecanismo de trocas, em que, após uma determinada troca, a criança não mais dispõe de todas as unidades que compõem essa ordem.

TEXTO 2

É importante destacar que as ideias matemáticas estão presentes nas relações que são estabelecidas pela criança ao interagir com o material; elas não provêm do material em si. Isso vai exigir atenção do professor para as abstrações que o aluno faz, corrigindo uma distorção muito comum: o aluno abstrai o material didático e não o conceito. Há, portanto, uma inversão didática. Por exemplo: ao se trabalhar com o material dourado o aluno diz que a dezena é a barra – ideia equivocada, pois a dezena é um grupo de 10. A barra é apenas um material didático que representa um grupo de 10, ou seja, ela é formada por 10 unidades.

Tanto nos agrupamentos como nas trocas, a proposta é trabalhar com os dois conceitos: composição (agrupamentos) e decomposição (desagrupamentos).

O trabalho pode ser iniciado com bases não decimais e somente após a compreensão dos agrupamentos e trocas em diferentes bases, é introduzida a base 10. Há, pelo menos, dois argumentos para essa opção.

1. Trabalhando com bases menores, o número de agrupamentos e trocas possíveis é muito maior do que quando se trabalha com bases maiores. Dessa forma, é possível trabalhar com pouco material sobre a carteira (muito material sobre a carteira de uma criança é um elemento complicador) e realizar um número suficiente de agrupamentos e trocas.

2. Ao trabalhar com bases não decimais, a criança realmente adquire o conceito de valor posicional para os algarismos do registro; não há como ela criar mecanismos de memorização. Exemplificando: se apresentarmos à criança o registro 123 na base 10 e lhe perguntarmos quantas dezenas há ao todo nessa quantidade, com poucas atividades ela já cria mecanismos próprios de visualização (sem compreensão) do 12, ou seja, 12 dezenas. No entanto, se apresentarmos à criança o registro (123) na base 4 e lhe perguntarmos quantos feixes ou grupos de 4 palitos ela teria ao todo, se desagrupasse os feixões, ela dificilmente responderia que são 12, mas iria realizar os desagrupamentos (ou destrocar as fichas), concluindo que há ao todo 6 grupos de 4. Num momento posterior, ela será capaz de responder mentalmente, dizendo que o 1 representa um grupo de 4 grupos de 4 palitos que, somados com os 2 grupos já existentes, formaria ao todo 6 grupos de 4 palitos – assim, em (123) na base 4 há 6 grupos de 4 elementos.

Quanto aos materiais a serem usados, podem ser usados os mais simples: palitos de sorvete, elásticos, ábaco e material estruturado (base 2, base 6, base 10).

A base 10

No trabalho com a base 10 podemos seguir os mesmos procedimentos das demais bases: inicialmente fazemos os agrupamentos com materiais de contagem – no caso palitos – e, depois introduzimos as trocas com o material dourado e o ábaco. Assim, os alunos farão o jogo 'nunca 10' com material de contagem.

Durante a realização dos jogos, o papel do professor é fundamental: ele precisa percorrer os grupos, observar o que os alunos estão fazendo, formular questões para se certificar de que as regras do jogo estão sendo bem entendidas; ao socializar os registros feitos pelos diferentes grupos, na lousa, propor questões que sejam interessantes, desafiadoras para as crianças. Lembre-se de que as ideias matemáticas estão presentes nas relações que são estabelecidas pela criança ao interagir com o material; elas não provêm do material em si.

Qualquer que seja a base trabalhada é fundamental que haja o registro do jogo e a problematização dos registros. É dessa forma que o aluno vai abstraindo os conceitos de base e de valor posicional.

Nesse processo o aluno vai ampliando seu sentido numérico e passa a compreender a escrita numérica com qualquer número de ordens.

Destacamos ainda a importância de sempre se trabalhar com a composição e decomposição – qualquer que seja a base trabalhada. Por exemplo, ao término do jogo 'nunca 10" o aluno compôs 123, tendo sobre a mesa 1 placa, 2 barras e 3 cubinhos. Nesse momento, podemos perguntar a ele:

- Quantas dezenas há em 123? A expectativa é que ele devolva a placa e pegue 12 barras que, juntando com as 2 já existentes, totalizem 12 e responda que, em 123 há 12 dezenas.
- Se destrocarmos as dezenas por unidades, quantas unidades há em 123? A expectativa é que o aluno, a cada barra que devolva pegue 10 cubinhos, devolvendo 10, ele pega 100, devolvendo 12, ele pega 120. Juntando os 120 cubinhos com os 3 já existentes, há um total de 123 cubinhos, portanto, 123 unidades. Nesse momento é fundamental também ir explorando o cálculo mental: a cada barra, quantos cubinhos devo pegar? Nesse movimento ir contando de 10 em 10: 10, 20, 30, ... 120.

Quanto aos materiais didáticos é fundamental que se diversifique. Como destacado anteriormente, o material de contagem (palitos, canudos) é rico por possibilitar que o aluno sempre tenha todos os elementos que compõem as dezenas, as centenas e, portanto, poderá recorrer à contagem, sempre que necessário. O material dourado (ou base 10) é rico por possibilitar um trabalho simultâneo com o conceito de medida. Isso porque quando o aluno conclui que a barra tem 10 cubinhos, é porque o cubinho foi tomado como unidade de medida (no caso de volume). O ábaco é, provavelmente, o mais rico para o trabalho com valor posicional, uma vez que ele exige uma maior abstração do aluno e a compreensão da posição que cada algarismo ocupa no número, quando registra a quantidade representada num ábaco. Além desses materiais, pode-se utilizar também cédulas de 1, 10 e 100 do nosso sistema monetário, uma vez que elas também possibilitam as trocas.

Vale ressaltar mais uma vez que esse é um trabalho contínuo que não se esgota num curto período de tempo. Precisa ser retomado ao longo do ano letivo e em anos posteriores, para garantir sua total compreensão pelos alunos.

Três propostas de sequência didática para o trabalho com o sistema de numeração decimal

1ª sequência: Usando o ábaco e trabalhando a base 5

A. Jogo “Nunca 5”

Material:

- um dado convencional
- um ábaco vertical
- argolas em três cores: amarela, azul e verde.

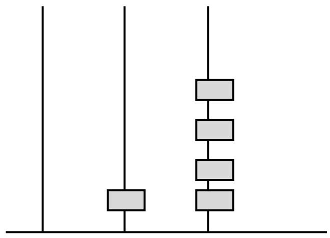
Regras:

1. Organize-se em grupos.
2. Cada um, na sua vez de jogar, lança o dado e compra as argolas amarelas de acordo com o número de pontos na face do dado.
3. As argolas serão colocadas na primeira haste do ábaco.
4. Nunca pode ficar 5 argolas de uma mesma cor, na mesma haste. Assim, se o primeiro jogador colocar ou somar 5 ou mais argolas amarelas na primeira haste, deverá fazer a troca de argolas.
5. Cada 5 argolas amarelas são trocadas por 1 argola azul que será colocada na segunda haste.
6. O dado e o ábaco só deverão ser passados para o próximo jogador depois da realização das trocas, quando possível. Caso o primeiro jogador tire 1, 2, 3 ou 4 na face do dado, apenas coloca as argolas na primeira haste, passa o ábaco e o dado para o próximo jogador e aguarda a sua próxima vez de jogar.

7. O próximo jogador lança o dado e compra as argolas amarelas, colocando-as na primeira haste. Se chegar a 5 ou ultrapassar 5 deverá fazer a troca por 1 argola azul.
8. O jogo continua até que 5 argolas azuis sejam trocadas por uma verde. O jogador que conseguir realizar essa troca ganha o jogo.
Mas atenção: os pontos do dado só dão direito a argolas amarelas.

B. Resolvendo situações-problemas a partir do jogo "nunca 5"

1. O grupo de Carolina, Lucas, Maria e Edgar estão com uma rodada do "nunca 5" em andamento.
a) É a vez de Carolina jogar. Veja como estava o ábaco. Ela obteve a face 3 no dado. Faça o desenho de como ficará o ábaco após as trocas que Carolina fará.

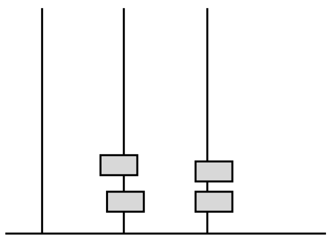


b) Lucas joga depois de Carolina. Ele obteve a face 4 no dado. Represente o ábaco após as trocas.

c) Agora é a vez de Maria. Ela obteve a face 6 no dado. Represente no ábaco como ficarão as argolas após a troca de Maria.

d) Agora é a vez de Edgar. Ele obteve 5 na face do dado. Represente no ábaco como ficarão as argolas após a troca de Edgar.

2. Num determinado momento do jogo "nunca 5" havia o seguinte registro num ábaco:



Quantos pontos o grupo já tinha obtido no dado? Ou seja, se todas as argolas fossem destrocadas por argolas amarelas, quantas haveria ao todo? Faça a destroca.

2ª sequência: A base 10 com o material de contagem

A. "Jogo Nunca 10"
<u>Materiais</u>
Palitos de sorvete (ou canudinhos de refrigerante)
2 dados convencionais

Regras

- Cada jogador na sua vez joga os 2 dados e calcula a soma dos pontos marcados nas faces dos dados voltados para cima.
- Em seguida, o jogador pega do monte de palitos a quantidade correspondente aos pontos dos dados.
- A cada 10 palitos o jogador faz um feixinho amarrando os palitos com um elástico.
- Segue a jogada para o outro jogador.
- O jogo termina quando os palitos da mesa se esgotarem.
- Ao final do jogo todos fazem o registro na tabela. cada jogador, seguindo a ordem da jogada, diz para o grupo a quantidade de agrupamentos e de palitos soltos que fez.
- Ganha o jogo quem tiver a maior quantidade de palitos.
- Terminado o jogo, fazer o registro.

B. Explorando os registros do "nunca 10"

1. Registre o jogo "nunca 10" de seu grupo.

Jogadores	**Feixões (10 grupos de 10)**	**Feixinhos (grupos de 10)**	**Palitos soltos (grupos de 1)**
Total			

a) Quem obteve o maior número de palitos?
b) Quem obteve o menor número de palitos?
c) Quantos palitos há em cada feixinho?
d) Quantos feixinhos há em cada feixão?
e) Qual é o maior número de palitos soltos que podemos ter? Por quê?
f) Qual é o maior número de feixinhos soltos que podemos ter? Por quê?
g) Coloque em ordem crescente os nomes dos colegas de acordo com o total de palitos que cada um recebeu.

2. Anote no quadro os agrupamentos de palitos de todos os grupos da classe.

Grupos de Alunos	**Feixões (10 grupos de 10)**	**Feixinhos (grupos de 10)**	**Palitos soltos (grupos de 1)**
A			
B			
C			

D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			

a) Qual grupo da classe obteve a maior quantidade de palitos?
b) Qual grupo da classe obteve a menor quantidade de palitos?
c) Quantos palitos há num feixinho?
d) Quantos feixinhos há num feixão?
e) Quantos palitos há num feixão?

C. Resolvendo problemas a partir do jogo

Considere o registro de um grupo:

Grupos de alunos	**Feixóes (10 grupos de 10) 100**	**Feixinhos (grupos de 10) 10**	**Palitos soltos (grupos de 1) 1**
Edgar		9	0
Carolina	1	1	2
Maria	1	0	2
Felipe		9	6
Theresa		9	8
Lucas	1	2	0

1. Quem ganhou o jogo?
2. Quantos pontos Maria terá que tirar nos dados para ficar com o mesmo número de palitos que Carolina?
3. a) Quem tem o número de palitos mais próximo do número de palitos do vencedor?
b) Quantos pontos esse jogador precisaria tirar nos dados para ficar em primeiro lugar?
4. a) Quantos palitos Theresa precisa pegar para formar um feixão?
b) Quais pontos deveriam aparecer nas faces dos dados para Theresa fazer um feixão?

3ª atividade: A base 10 com o material dourado

A. “Jogo Nunca 10”
<u>Materiais</u>
Material dourado
2 dados convencionais

<u>Regras</u>
- Cada jogador na sua vez joga os 2 dados e calcule a soma dos pontos marcados nas faces dos dados voltados para cima.

- Em seguida, o jogador pega a quantidade de cubinhos correspondente aos pontos dos dados.
- A cada 10 cubinhos o jogador troca por uma barra.
- O jogo continua com a compra de cubinhos.
- Quando o jogador conseguir 10 barras, ele troca por uma placa.
- Termina a rodada no grupo e o jogador que conseguir o maior número de pontos ganha o jogo.

B. Explorando os registros do "nunca 10"

Considere o seguinte registro de um grupo:

Jogador	**Unidade de milhar (cubo) Grupo de 10x10x10**	**Centena (placa) Grupo de 10z10**	**Dezena (barra) Grupo de 10**	**Unidade (cubinho) Grupo de 1**
Paulo	1	0	1	2
Marta		9	9	9
Edna	1	0	0	8
Caio		9	3	8
Renata		8	3	9
Maria		9	8	9

a) Qual jogador obteve o maior número de pontos?
b) Quantos pontos a mais Marta precisaria obter para atingir o total de pontos obtidos por Paulo?
c) O que acontecerá com o total de pontos de Renata se, numa próxima jogada ela obtiver 12 pontos nos dados?
d) Quantas centenas ao todo tem cada um dos jogadores? Quantas dezenas? E quantas unidades?
e) Decomponha cada uma dessas quantidades de três maneiras diferentes.

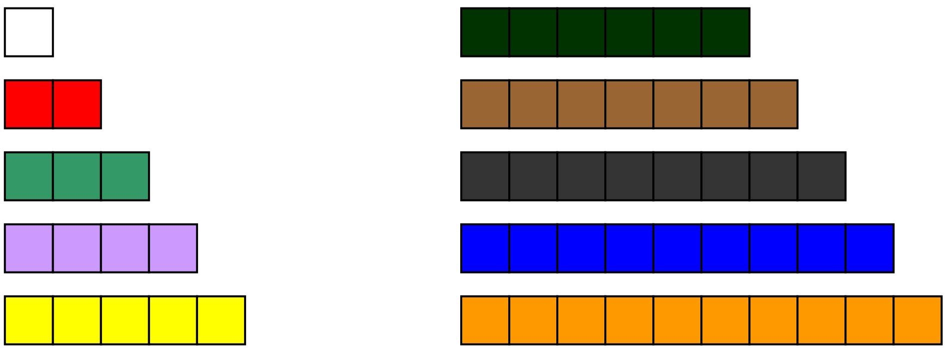
TEXTO 3

A ESCALA CUISENAIRE

Adair Mendes Nacarato

Esse material também conhecido com escala Cuisenaire ou reguinhas Cuisenaire foi criado pelo educador belga Georges Cuisenaire Hottelet. Ele até criou um método, conhecido como método “Cuisenaire”. Trata-se de um material constituído por 10 reguinhas, de mesma largura e comprimento variando de 1 a 10 cm. Cada barrinha/reguinha é de uma cor.

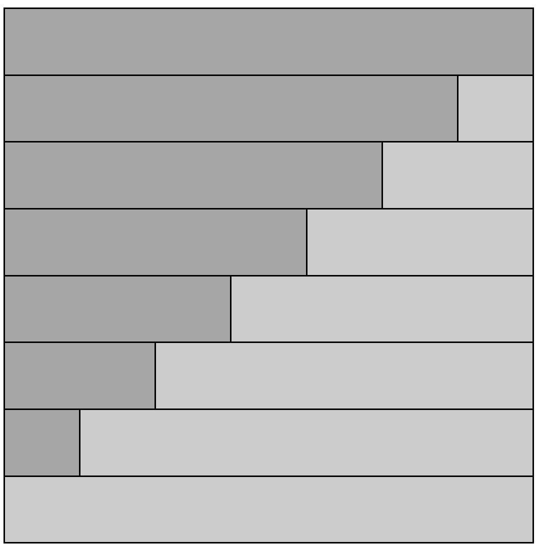
É um material estruturado relacionado à ideia de medida e, por isso, é de natureza contínuo. Assim, dizer que a barrinha vermelha tem 2 cm ou 2 unidades é porque estamos tomando a barrinha branca, de 1cm como a unidade.



Algumas sugestões para o trabalho com esse material.

1. <u>Composição de uma quantidade qualquer</u>

Escolhe-se uma barrinha qualquer do jogo e verificam-se todas as possibilidades de compô-la com outras barrinhas do material. Por exemplo, utilizando no máximo 2 barrinhas, compor a barra preta (7 unidades ou 7 cm)



7 + 0 = 7

6 + 1 = 7

5 + 2 = 7

4 + 3 = 7

3 + 4 = 7

2 + 5 = 7

1 + 6 = 7

0 + 7 = 7

- Explorar a composição de vários números apenas com as barrinhas.
- Explorar a composição, seguida do registro em papel quadriculado.

2. <u>Explorando a subtração</u>

Pode-se explorar a ideia de subtrair: de uma peça subtrair a outra; ou a ideia de completar. Por exemplo, que peça falta à verde-escura para completar a azul? Ou seja, quanto falta a 6 para completar 9?

3. <u>Trabalhando com múltiplos e divisores de um número</u>

Por exemplo, quais são as peças que cabem em um número inteiro de vezes na peça marrom? Ao se responder a essa pergunta, estamos verificando quais são as peças divisoras da peça marrom, ou seja, quais são os divisores de 8, ou dito de outra maneira, o 8 é múltiplo de quais números?

3.1. <u>Divisores e múltiplos</u>

- Quais são as peças divisoras da peça amarela?
- Quais são as peças divisoras da peça azul?
- A peça laranja é múltipla de quais peças?
- Quais são as peças que cabem um número inteiro de vezes na peça preta?

<u>Uma sugestão de sequência:</u>

I. Pegue a peça verde-escura (6 unidades).

a) Quantas peças brancas são necessárias para formar a peça verde-escura?

b) Quantas peças vermelhas são necessárias para formar a peça verde-escura?

c) Quantas peças verde-claras são necessárias para formar a peça verde-escura?

d) Quantas peças verde-escuras são necessárias para formar a peça verde-escura?

e) Represente no quadriculado todas as construções feitas nos itens anteriores. Depois, complete a tabela com esses dados.

Peças usadas para formar a peça verde-escura	Número de peças necessárias para formar a peça verde-escura.

f) A peça lilás cabe um número inteiro de vezes na peça verde-escura? Por quê?

g) Existem outras peças que cabem um número inteiro de vezes na peça verde-escura? Por quê?

II. Pegue as peças azul (9 unidades) e preta (7 unidades) e registre os resultados.

a)

Peças usadas para formar a peça azul	Número de peças necessárias para formar a peça azul.

b)

Peças usadas para formar a peça preta	Número de peças necessárias para formar a peça preta

III. a) Pegue a peça laranja (10 unidades). Verifique quais outras peças cabem um número um número inteiro de vezes na peça laranja.

Peças que formam **a peça laranja**	**Número de peças** **necessárias**

b) Quais são as peças divisoras da peça laranja?

c) Quantas unidades há em cada uma dessas peças?

d) Quais são os divisores de 10, ou seja, os números que cabem um número inteiro de vezes no 10?

3.2. m.d.c.

- Quais são as peças divisoras da peça marrom?
- Quais são as peças que cabem em um número inteiro de vezes na peça verde-escuro?
- Quais são as peças divisoras comuns às peças marrom e verde-escura?
- Dentre as peças divisoras comuns, qual é a maior?

3.3 m.d.c pelas subtrações sucessivas

Ex: m.d.c (6 e 8) → peças marrom e verde-escura

4. Explorando medidas

a) Tome a peça branca como unidade de medida. Qual é a medida das peças:

Vermelha	Amarela	Preta
Verde-clara	Verde-escura	Azul
Lilás	Marrom	Laranja

b) Tome a peça vermelha como unidade de medida. Qual é a medida das peças:

Branca	Amarela	Preta
Verde-clara	Verde-escura	Azul
Lilás	Marrom	Laranja

c) Tome a peça verde-clara como unidade de medida. Qual é a medida das peças:

Branca	Amarela	Preta
Vermelha	Verde-escura	Azul
Lilás	Marrom	Laranja

d) Tome a peça amarela como unidade de medida. Qual é a medida das peças:

Branca	Lilás	Preta
Vermelha	Verde-escura	Azul
Verde-clara	Marrom	Laranja

5. Algumas situações com frações

a) De que cor é a peça que representa $\frac{1}{5}$ da peça laranja?

b) De que cor é a peça que representa $\frac{2}{5}$ da peça laranja?

TEXTO 3

c) De que cor é a peça que representa $\frac{3}{5}$ da peça laranja?

d) De que cor é a peça que representa $\frac{4}{5}$ da peça laranja?

e) De que cor é a peça que representa $\frac{5}{5}$ da peça laranja?

f) De que cor é a peça que representa $\frac{1}{3}$ da peça azul?

g) De que cor é a peça que representa $\frac{2}{3}$ da peça azul?

h) De que cor é a peça que representa $\frac{3}{2}$ da peça roxa?

i) De que cor é a peça que representa $\frac{3}{4}$ da peça roxa?

j) De que cor é a peça que representa $\frac{2}{3}$ da peça verde escuro?

O CÁLCULO MENTAL NA SALA DE AULA[1]

A habilidade para o cálculo mental é construída a partir da resolução de uma série de problemas e, principalmente, na interação com outros alunos e com o professor. É nessa dinâmica interativa que os alunos vão construindo um repertório de estratégias de cálculo mental. Portanto, nesse tipo de cálculo são utilizadas estratégias pessoais. Elas são pessoais porque o que é fácil para alguns é difícil para os outros. Dessa forma, não se trata de impor uma forma de calcular, mas possibilitar que os alunos tenham acesso a diferentes estratégias e se apropriem daquelas que julgam as mais adequadas para o seu estilo cognitivo de pensar matematicamente.

Trazemos inicialmente algumas ideias presentes nos PCN:

”Uma boa habilidade em cálculo depende de consistentes pontos de apoio, em que se destacam o domínio da contagem e das combinações aritméticas, conhecidas por denominações diversas como tabuadas, listas de fatos fundamentais, leis, repertório básico, etc”.

Evidentemente, a aprendizagem de um repertório básico de cálculo não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como consequência, a memorização compreensiva desses fatos.

A construção apoia-se na resolução de problemas e confere significados a escritas do tipo a + b = c, a x b = c. Já a organização dessas escritas e a observação de regularidades facilita a memorização compreensiva.

Ao construírem e organizarem um repertório básico os alunos começam a perceber, intuitivamente, algumas propriedades das operações, tais como a associatividade e a comutatividade, na adição e multiplicação. A comutatividade na adição é geralmente identificada antes de qualquer apresentação pelo professor. Isso pode ser notado em situações em que, ao adicionarem 4 + 7, invertem os termos para começar a contagem pelo maior número.

Também algumas regularidades, presentes nas operações, começam a ser percebidas, tais como: observar que, nas multiplicações por 2, todos os resultados são pares; que, na tabuada do cinco, os resultados terminam em zero ou em cinco, etc.

Dentre os procedimentos que os alunos costumam utilizar na construção e organização desse repertório, podem-se destacar:

__ contar de dois em dois, três em três para construir as multiplicações por 2, por 3...;

__ usar resultados de adições de números iguais, como 4 + 4, 7 + 7 para cálculos com números maiores como 40 + 40, 700 + 700, etc.;

[1] Texto para uso exclusivo em sala de aula – Adair Mendes Nacarato.

__ "dobrar e adicionar um" para se chegar ao resultado de 5 + 6 como sendo 5 + 5 + 1;

__ adicionar pares de números iguais, como, por exemplo, 8 + 8, para calcular 7 + 9;

__ aplicar as adições que resultam 10 em situações como 7 + 4, calculando (7 +3) + 1 (um dos números é decomposto de maneira a completar um outro para formar dez);

__ usar regras ou padrões na construção de listas, como, por exemplo:

07 + 5 = 12 = 5 + 07
17 + 5 = 22 = 5 + 17
27 + 5 = 32 = 5 + 27
37 + 5 = 42 = 5 + 37;

__ encontrar resultados de multiplicações pela adição ou pela subtração: 6 x 8 pode ser calculado como 5 x 8 + 8 = 40 + 8 = 48, e 9 x 7 como 10 x 7 – 7 = 70 – 7 = 63;

__ decompor um número para multiplicá-lo, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: 12 x 5 = (10 x 5) + (2 x 5) ou (6 x 5) + (6 x 5).

A construção dos fatos da subtração e da divisão deve ser realizada, buscando-se compreender suas relações com a adição e a multiplicação, utilizando-se como recurso a exploração de estratégias semelhantes usadas no cálculo dessas operações. Nesse trabalho também é importante que os alunos observem:

__ a validade da "invariância da diferença": adicionar ou subtrair um mesmo valor aos dois termos de uma subtração não altera a diferença __ 16 – 9 dá o mesmo resultado que 17 – 10;

__ a validade de "simplificar" os termos de uma divisão para obter o quociente (16: 4 dá o mesmo resultado que 8: 2 e 4 : 1);

__ a não-validade, na subtração e na divisão, de propriedades presentes na adição e na multiplicação, tais como a comutatividade e a associatividade.

O foco do trabalho de construção de um repertório básico para o desenvolvimento do cálculo consiste em identificar as estratégias pessoais utilizadas pelos alunos e fazer com que eles evidenciem sua compreensão por meio de análises e comparações, explicitando-as oralmente. Já a organização desse repertório dá-se por meio da exploração das escritas numéricas e apoia-se na contagem, no uso de maneiras didáticos e da reta numérica". (BRASIL, p.112-118)

A pesquisadora Parra (1996) defende que o ensino de cálculo mental na escola se justifica pela sua finalidade prática, visto que há várias situações do cotidiano vinculadas ao cálculo mental não exato (baseado em estimativas) ou exato. Trata-se de conhecimentos permanentemente em "uso".

As necessidades sociais atuais se contrapõem a uma concepção tradicional de educação, na qual se defendia que os trabalhadores deveriam ter três capacidades básicas: ler, escrever e calcular. Atualmente, a difusão mundial da tecnologia tem exigido novas competências matemáticas dos trabalhadores. Segundo ela:

> A capacidade para desenvolver problemas, tomar decisões, trabalhar com outras pessoas, usar recursos de modo pertinente, fazem parte do perfil

> reclamado pela sociedade de hoje (levando em conta que o mundo enfrenta uma grave crise, entre outros aspectos, pela falta de trabalho para milhões de pessoas, as características mencionadas não parecem perder valor, mesmo vistas de uma perspectiva não-ingênua).
> As mais diferentes perspectivas afirmam que o centro do ensino de matemática deva ser a resolução de problemas. Ao mesmo tempo parece evidente que a capacidade progressiva de resolução de problemas demanda um domínio crescente de recursos de cálculo.
> Neste sentido, responder à necessidade social indica uma aproximação com o cálculo que torne os alunos capazes de escolher os procedimentos apropriados, encontrar resultados e julgar a validade das respostas. (p.187).

Para a autora: “a concepção de cálculo mental que vamos desenvolver não exclui a utilização de papel e lápis, particularmente no registro de cálculos intermediários em um processo que é, essencialmente, mental” (p.188). Ela classifica o cálculo em três tipos.

O primeiro costuma ser chamado de *cálculo automático* ou *mecânico*, e se refere à utilização de um algoritmo ou de um material (ábaco, régua de cálculo, calculadora, tabela de logaritmos, etc.).

O segundo é chamado *cálculo pensado* ou *refletido*. É em relação a este significado que vamos considerar o cálculo mental.

Finalmente, o *cálculo mental* é entendido como o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter resultados exatos ou aproximados.

Não se trata de descartar o cálculo escrito pelo algoritmo, muito pelo contrário. Os alunos precisam entender a lógica dos algoritmos. No entanto, na realização de um algoritmo, nem sempre há o acompanhamento do cálculo refletido.

A autora aponta 5 razões para a inclusão do ensino de cálculo mental:

1. *As aprendizagens no terreno do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas*.

“O enriquecimento das relações numéricas através do cálculo mental facilita para os alunos, frente a uma situação, serem capazes de moldá-la, por antecipação, por reflexão” (p.195).

O cálculo mental favorece o “raciocinar” do aluno, o estabelecimento de relações entre os dados, à manipulação a partir dos significados dos dados, no contexto da situação e não simplesmente a aplicação de um algoritmo qualquer, sem previsão ou poder de argumentação da situação proposta.

2. *O cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico.*

As atividades de cálculo mental possibilitam o cálculo com o objetivo de reflexão, favorecendo o surgimento e o tratamento de relações estritamente matemáticas, a utilização de propriedades implícitas e o raciocínio a respeito dos cálculos. E, principalmente a ‘fazer matemática’: analisar dados, estabelecer relações, tirar conclusões, fundamentá-las, provar o que se afirma, reconhecer situações em que não funciona, estabelecer os limites de validade do que se encontrou.

3. *O trabalho de cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que, a nosso entender, favorece uma melhor relação do aluno com a matemática.*

É a possibilidade dos alunos articularem o que sabem com o que têm que aprender. Permite uma relação mais pessoal com o conhecimento, em oposição à alienação: "O cálculo mental é o domínio privilegiado no qual se deve deixar que os alunos assumam sua individualidade e utilizem a fundo o grupo para oferecer a cada um a oportunidade de aderir às soluções propostas pelos outros". (equipe ERMEL, p.199).

4. *O trabalho de cálculo pensado deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático.*

A autora tenta mostrar que não há contradição nesse argumento. Para ela, "o cálculo mental é uma via de acesso para a compreensão e construção de algoritmos", ou seja, a reflexão a respeito do significado de cálculos intermediários facilitam a assimilação posterior dos algoritmos (ex: 28 + 35 = 20 + 8 + 30 + 5 = 50 + 13 = 63). Além disso, numa situação como a do exemplo, os conhecimentos são colocados em ação. Assim, o cálculo mental passa a ser também uma ferramenta de controle do resultado do algoritmo. A autora defende também a importância da memorização - ou como ela denomina "repertório" – como condição necessária, porém não suficiente para a aquisição de algoritmos.

A essas vantagens, acrescentamos outra apontada por Mendonça e Lellis (s.d.): as contribuições do cálculo mental para os aspectos emocionais dos alunos. O progresso dos alunos no cálculo mental é acompanhado de atitudes mais positivas frente à Matemática e ao estudo em geral. "Enfrentar e vencer desafios aumenta a autoconfiança das pessoas. E quando ocorre a invenção de um novo processo de cálculo (novo, ao menos para aquela turma) parece que todos repartem a sensação de que a Matemática não é inatingível. Cada aluno começa a sentir-se capaz de criar, nesse domínio. Além de tudo isso, é perceptível o aumento da capacidade do aluno de concentrar-se e estar atento nas aulas, em decorrência da prática continuada do cálculo mental". (p.52).

Parra (1996, p.206-207) apresenta uma sequência para o trabalho com cálculo mental, presente no currículo argentino da década de 1990.

1º Ciclo: Conteúdos de Matemática. Cálculo Mental
(Província de Corrientes)

Distribuição de conteúdos realizada pela licenciada Irma Saiz para o programa de matemática.

1ª série

Somas da forma: a + b = 10;
Subtrações da forma: 10 – a = b;
Subtrações da forma: a – b = 1;
Somas da forma: a + a = com a ≤ 10;
Complementos de 10: a +... = 10;
Somas da forma: 10 + a =...; 20 + a =...;
Somas da forma: a + b = 100
com a e b múltiplos de 10
(exemplo: 20 + 80 = 100);
Complementos de 100: a + ... = 100 com
a múltiplo de 10 (exemplo: 70 + ... = 100);
Expressões equivalentes:
34 = 30 + 4 9 = 5 + 6 – 2
34 = 10 + 24 9 = 4 + 5
34 = 10 + 10 + 10 + 4
9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1
34 = 40 – 6 9 = 10 – 1
etc.
Propriedades comutativa e associativa.

2ª série

Subtrações da forma: a – b = 10;
Somas da forma: 100 + a =;
Subtrações da forma 100 – a = com
a múltiplo de 10 (exemplo: 100 – 30 =...);
Complementos de 100: a + ... = 100
(exemplo: 28 + ... = 100);
Somas da forma: a + b = 100
(exemplo: 75 + 25 = 100; 32 + 68 = 100);
Dobros e metades ;
Espressões equivalentes:
147 = 50 + 50 + 47
147 = 100 + 47
147 = 40 + 60 + 30 + 17
147 = 200 – 50 – 3
Distância entre dois números
(exemplo: distância entre 50 e 76);
Escalas crescentes e decrescentes
do 2, 5 e 10.

3ª série

Escalas ascendentes e descendentes
do 10,20,...100,200...;
Enquadramento de números como
dezenas, centenas, etc.
(exemplo: 20<28<30 ;
140<145<150;
100<145<200);
Subtrações da forma: a – b = 1; a – b = 10;
a – b = 100; etc.;
Espressões equivalentes:
(exemplo: 1359 = 500 + 500 + 300 + 59;
1359 = 1000 + 300 + 50 + 9;
1359 = 2000 – 600 – 40 – 1);
Somas e subtrações com medidas
do tipo: ano, dia,
mês, semana, hora, ¼ hora, etc.;
Multiplicações da forma a × b com
a < 10;
Divisões e multiplicações especiais:
× 2; ÷ 2; × 4 (multiplicar duas vezes por 2);
× 8 (multiplicar três vezes por 2);
÷ 4 (dividir duas vezes por 2); × 5; ÷ 5; etc.;
Dobros e metades;
Triplos e terços;
Propriedades comutativa e associativa.

2º Ciclo: Conteúdos de Matemática. Cálculo Mental

4ª série

Enquadramento de um número na casa
das dezenas, centenas, unidades de mil, etc.;
Contar de 100 em 100 a partir de qualquer
número (exemplo: 741, 841, 941...).
Números equidistantes entre outros dois
(no meio de...).
Distância entre dois números quaisquer.
Metade e dobros de números de 3 ou 4 algarismos.
Espressões equivalentes (utilizando as 4 operações).
Diferentes maneiras de encontrar um produto:
8 × 14 = 2 × 4 × 14
= 8 × 2 × 7
= (8 × 10) + (8 × 4)
Cálculo da quantidade de algarismos de um quociente;
Estimativa de resultados de divisão de números naturais;
Comparação de frações com números inteiros
(maior, menor ou igual a 1 ou a 2, etc.).
Múltiplos dos primeiros números: 2, 3, 4, 5,...
Divisores de alguns números: 10, 12, 16, 15, 20,...
Cálculos com moedas e notas em uso.
Aproximação e arredondamento de resultados
das quatro operações.

5ª série

Somas da forma:
2000 + 5300 = ; 25000 + 2850 =...
Subtrações da forma: 807000 – 3000 = ;
807400 – 10 =...
Frações mais comuns de números inteiros:
1/4 de; 1/2 de; 1 + 1/2 de; 3/4 de; etc.
Dobros e metades de frações
(dobro de 1/3, metade de 6/4, metade de 3/4, etc.).
Somas de frações mais usuais
(1/2 + 1/4 = ; 1/2 + 3/4 = ; 2/3 + 1/6 = ; etc.)
Somas de decimais da forma: a + b = 1, a + b = 10, etc.
Subtrações de decimais da forma: 1 – 0,25 = ;
10 – 1,50 = ; etc.
Enquadramento de decimais entre dois inteiros:
31<31, 24<32;
Estimativa e aproximação de resultados
de medições de comprimento (ou distância),
capacidade, peso e tempo.
Estimativa da medida dos ângulos mais usuais:
45° (metade de 90°); 30° (terça parte de 90°);
135° (90 + 45); 60° (dobro de 30°); etc.

Referências bibliográficas

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:MEC/SEF,1997.

MENDONÇA, Maria do Carmo, LELLIS, Marcelo. O cálculo mental no ensino. *Revista de Ensino de Ciências*, n. 22. FUNBEC.[s.d.]

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. In *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

TEXTO 4

Algumas sugestões para adição e subtração:

1. Explorar adições de duas parcelas com soma até 10 (usar material de contagem, cuisenaire...).

2. Calcular mentalmente: 5 + 6 =

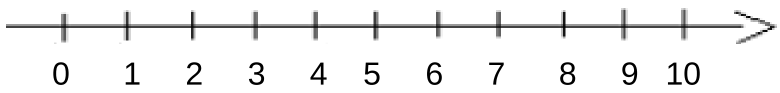
Estratégia A	Estratégia B
5 + 6 = _____	5 + 6 = ______
5 + 5 = 10	6 + 6 = 12
10 + 1 = 11	12 - 1 = 11

Explique cada uma dessas estratégias.

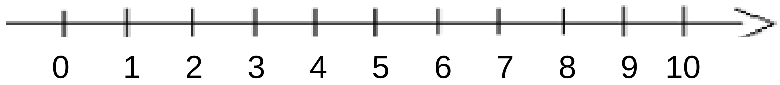
3. **Usando a reta numérica**

Complete com a parcela que falta em cada adição, de forma que a soma em cada uma delas seja sempre igual a 10. Faça a representação na reta numérica

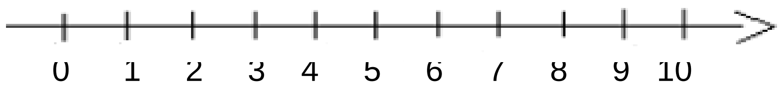
a) 3 + _____ = 10



b) _____ + 2 = 10



c) _____ + 4 = 10



4. **Ainda a reta numérica**

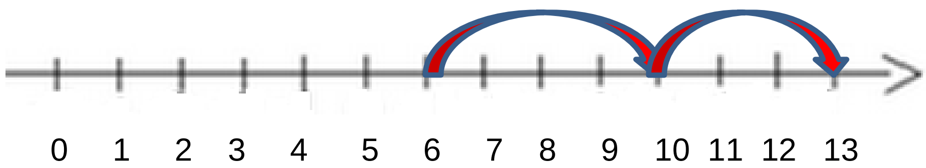
6 + 7 = _______

Veja como Ana registrou seu pensamento.

6 + 7

6 + 4 + 3 =

10 + 3 = 13



Veja como Léo registrou seu pensamento

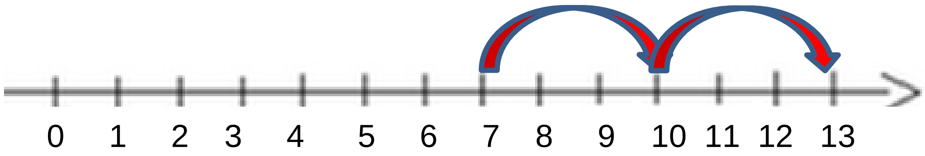
6 + 7

TEXTO 4

7 + 6 =

7 + 3 + 3

10 + 3 = 13



Explique como essas crianças pensaram.

5. **Identificando regularidades**

Para cada quadro, complete e depois analise a regularidade existente.

6 + 5 =
16 + 5 =
26 + 5 =
36 + 5 =
46 + 5 =
56 + 5 =

2 + 3 =
20 + 30 =
200 + 300 =

3 + 4 =
30 + 40 =
300 + 400 =

6. Completando dezenas/centenas

A. Vamos completar a dezena exata mais próxima.
a) 15 + ___ = 20
b) 27 + ___ = 30
c) ___ + 42 = 50
d) ___ + 19 =

B. Vamos completar a centena exata mais próxima.
a) 10 + ___ = 100
b) 40 + ___ = 100
c) ___ + 20 = 100
d) ___ + 50 = 100

7. Compondo e decompondo em dezenas exatas:
A. Complete com o número que falta, sempre usando dezenas exatas:

a) 34 = ___ + 4
b) 29 = ___ + 9
c) 45 = ___ + 5
d) ___ + 1 = 41

B. Complete com o número que falta, sempre partindo de dezenas exatas:

a) 34 = 40 - ___
b) 57 = 60 - ___
c) 13 = 20 - ___
d) 9 = ___ - ___

8. Analisando estratégias de cálculo mental: 18 + 13

Aluno A

18 + 13 =
10 + 8 + 10 + 3 =
20 + 11 = 31

Aluno B

18 + 13 =
18 + 2 + 11 =
20 + 11 = 31

Aluno C

18 + 13 =
13 + 18 =
13 + 7 + 11 =
20 + 11 = 31

Aluno D

18 + 13 =
18 + 10 + 3
28 + 3 = 31

Explique cada uma dessas estratégias.

9. **Regularidades na subtração**

4 - 3 =	40 – 30 =	400 – 300 =
5 - 4 =	50 – 40 =	500 – 400 =
6 – 5 =	60 – 50 =	600 – 500 =
7 – 6 =	70 – 60 =	700 – 600 =
8 – 7 =	80 – 70 =	800 – 700 =
9 – 8 =	90 – 80 =	900 – 800 =
10 – 9 =	100 – 90 =	1000 – 900 =

Explique as regularidades de cada quadro.

10. **Estratégias de cálculo mental para a subtração**

32 – 15 = 32 – 10 = 22 22 – 5 = 17	**32 – 15 =** 32 – 12 = 20 20 – 3 = 17	**32 – 15 =** 35 – 15 = 20 20 – 3 = 17	**32 – 15 =** 15 para chegar em 20 dá 5; 20 para chegar em 30 dá10; 30 para chegar em 32 dá 2. Então, 5+ 10 +2 = 17

Explique as estratégias acima

11. **Criando nossas estratégias:**

1. Use a estratégia da reta numérica para calcular:

a) 18 + 25

b) 37 + 49

c) 31 – 18 =

d) 45 – 29 =

2. Use a estratégia que quiser, mas registre-a.

a) 67 + 29 =

b) 128 + 35 =

c) 7- 48 =

d) 102 – 39 =

Pesquisando a tabuada do 3

0 x 3 =	**10 x 3 =**	**20 x 3 =**	**30 x 3 =**	**40 x 3 =**
1 x 3 =	**11 x 3 =**	**21 x 3 =**	**31 x 3 =**	**41 x 3 =**
2 x 3	**12 x 3**	**22 x 3**	**32 x 3**	**42 x 3**
3 x 3 =	**13 x 3 =**	**2 x 3 =**	**33 x 3 =**	**43 x 3 =**
4 x 3 =	**14 x 3 =**	**24 x 3 =**	**34 x 3 =**	**44 x 3 =**
5 x 3 =	**15 x 3 =**	**25 x 3 =**	**35 x 3 =**	**45 x 3 =**
6 x 3 =	**16 x 3 =**	**26 x 3 =**	**36 x 3 =**	**46 x 3 =**
7 x 3 =	**17 x 3 =**	**27 x 3 =**	**37 x 3 =**	**47 x 3 =**
8 x 3 =	**18 x 3 =**	**28 x 3 =**	**38 x 3 =**	**48 x 3 =**
9 x 3 =	**19 x 3 =**	**29 x 3 =**	**39 x 3 =**	**49 x 3 =**

AS IDEIAS DA MULTIPLICAÇÃO

Adair Mendes Nacarato

Sabe-se que a criança desenvolve o conceito de multiplicação a partir da resolução de situações-problema e, que um trabalho regular com as ideias dessa operação possibilita a elaboração do conceito, bem como a memorização dos fatos básicos (a tabuada). Além disso, em várias situações do cotidiano, ela utiliza a multiplicação. Por exemplo, quando ela vê nos supermercados, produtos organizados em disposições retangulares; quando ela compra 2 chocolates, sabendo que cada um custo 3 reais. No entanto, a sistematização dessas ideias deve ser feita em sala de aula, de forma gradativa.

Há uma tendência nas práticas de ensino de matemática de enfatizar a multiplicação como a adição de parcelas iguais. Sem dúvida, essa é a ideia mais intuitiva para a criança. No entanto, há que ir além dela, uma vez que o raciocínio multiplicativo é muito mais complexo e limitar-se apenas a essa ideia de adição de parcelas iguais poderá comprometer o aprendizado futuro das crianças, quando elas se depararem com situações em que a multiplicação exige raciocínios mais elaborados.

A tabela a seguir traz uma síntese dessas ideias.

Ideia	Contexto	Procedimentos de cálculo	Propriedades da multiplicação	Modelo
Aditiva (repetição de medidas ou quantidades)	Fazer três vezes uma receita. Contar quantidades iguais.	Adição repetitiva (adição de parcelas iguais)	Ideia da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: 4 vezes 6 ovos é o mesmo que 3 vezes 6 ovos mais 1 vez 6 ovos.	Linear: reta numérica. Grupos iguais.
Disposição retangular	Determinar o número de ovos numa caixa. Determinar o números de alunos numa sala enfileirada.	Multiplicação (ideia de produto ou de área)	Propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. Numa disposição retangular o aluno visualiza que 3 x 4 é o mesmo que 4 x 3. Ou que 8 x 7 =	Estrutura retangular.

			8 x 5 + 8 x 2.	
	Empilhar embalagens: uma pilha com 5 caixas no comprimento, 3 na largura e 2 na altura – 5 x 3 x 2	Multiplicação (ideia de volume)	Propriedade associativa 5 x 3 x 2 é o mesmo que 5 x 2 x 3.	Estrutura tridimensional.
Proporcional	Calcular preços de artigos a partir do preço unitário.	Adição Contagem por dobros. Dupla contagem.	Ideia da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, usando os dobros: 4 vezes 5 é 2 vezes 5 mais 2 vezes 5 ou usando o fator 10: 10 x 5 = 50 11 x 5 – 10 x 5 + 1 x 5. Ou 8 x 12 = 8 x 10 + 8 x 2.	Linha dupla. Tabela.
Combinatório	Fazer menus. Combinar vestuários.	Multiplicação	Propriedades comutativa e associativa (no caso de termos mais do que dois fatores).	Tabela de dupla entrada. Árvore de possibilidades.

Fonte: MENDES, Fátima; DELGADO, Catarina. A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido de número. In: BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (orgs.). *O sentido do número*: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2010, p. 159-182.

Segundo as autoras, a primeira coluna indica os sentidos ou as ideias associados à multiplicação. A segunda, traz exemplos de contextos nos quais essas ideias são usadas; a terceira aponta os tipos de cálculo que decorrem dessa ideia; a quarta, traz as possíveis propriedades da multiplicação que estão envolvidas nessa ideia; e, a quinta, indica o modelo sugerido.

Elas nos sugerem observar a tabela e fazermos a leitura na horizontal, linha a linha, pois dessa forma podemos compreender a relação entre o contexto, a ideia da multiplicação e os possíveis cálculos que podem ser realizados.

TEXTO 5

As autoras ainda apontam a existência de três tipos de cálculo: cálculo por contagem, cálculo estruturado e cálculo formal. O cálculo por contagem refere-se à multiplicação de parcelas iguais, na qual os alunos sempre podem lançar mão da contagem para resolvê-la. Nesse nível não se pode dizer que os alunos tenham o raciocínio multiplicativo.

No cálculo estruturado as estratégias utilizadas pelos alunos incluem o uso explícito da multiplicação; eles não lançam mão da adição de parcelas iguais. Por exemplo, a multiplicação na reta numérica, ou a organização das combinações numa tabela de dupla entrada já sinalizam um raciocínio multiplicativo dos alunos.

No cálculo formal os alunos são capazes de realizar produtos de dois ou mais números sem recorrer a desenhos ou esquemas, operando exclusivamente com números. Mesmo nessa fase não significa que os alunos já tenham domínio de algoritmos convencionais. Eles podem raciocinar multiplicativamente, utilizando estratégias de cálculo mental, por exemplo, ou algoritmos pessoais. Para se chegar a esse tipo de cálculo, que deve ser o objetivo dos anos iniciais, é necessário um trabalho intensivo com os outros dois tipos de cálculos.

A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO – ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL

O USO DA CALCULADORA

Adair Mendes Nacarato

A. Algumas possibilidades de cálculo mental com a multiplicação

I. Construção dos fatos básicos (tabuada) com apoio de recursos didáticos. Algumas sugestões:

- Proposição de situações envolvendo todas as ideias da multiplicação para que os alunos possam ir construindo o significado dessa operação.
- Construção das tabuadas e percepção das regularidades. (Investigando as tabuadas).
- A partir das tabuadas do 2, 3 e 5 é possível construir todas as demais tabuadas. Para isso é preciso antes trabalhar as noções de dobro e triplo. A única mais difícil seria a do 7.

- A tabuada do 4 é o dobro da tabuada do 2;
- A tabuada do 6 é o dobro da tabuada do 3, ou o triplo da tabuada do 2;
- A tabuada do 8 é o dobro da tabuada do 4, ou o dobro do dobro da tabuada do 2;
- A tabuada do 9 é o triplo da tabuada do 3;
- A tabuada do 10 é o dobro da tabuada do 5, ou a tabuada do 1 acrescido de zero (Por que?);
- A tabuada do 7 é a soma da tabuada do 2 com a tabuada do 5.

2	4	8
1 x 2 = 2	1 x 4 =	1 x 8 =
2 x 2 = 4	2 x 4 =	2 x 8 =
3 x 2 = 6	3 x 4 =	3 x 8 =
4 x 2 = 8	4 x 4 =	4 x 8 =
5 x 2 = 10	5 x 4 =	5 x 8 =
6 x 2 = 12	6 x 4 =	6 x 8 =
7 x 2 = 14	7 x 4 =	7 x 8 =
8 x 2 = 16	8 x 4 =	8 x 8 =
9 x 2 = 18	9 x 4 =	9 x 8 =
10 x 2 = 20	10 x 4 =	10 x 8 =

3	6
1 x 3 =	1 x 6 =
2 x 3 =	2 x 6 =
3 x 3 =	3 x 6 =
4 x 3 =	4 x 6 =
5 x 3 =	5 x 6 =
6 x 3 =	6 x 6 =
7 x 3 =	7 x 6 =
8 x 3 =	8 x 6 =
9 x 3 =	9 x 6 =
10 x 3 =	10 x 6 =

TEXTO 6

Construindo a tabuada do 7:

1 x 7 =

2 x 7 =

3 x 7 =

4 x 7 =

5 x 7 =

6 x 7 =

7 x 7 =

8 x 7 =

9 x 7 =

10 x 7 =

II. Estratégias de cálculo mental

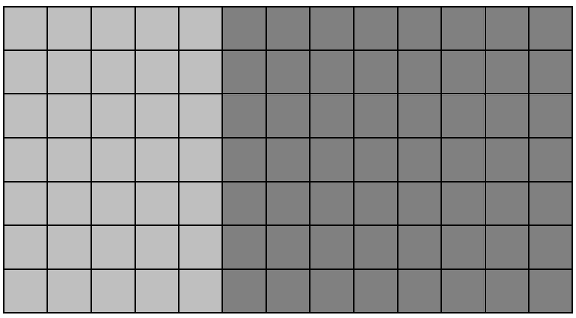
1. Complete os quadros e analise as regularidades existentes em cada um deles.

1 x 6 =
2 x 6 =
4 x 6 =
8 x 6 =

1 x 8 =
3 x 8 =
6 x 8 =
9 x 8 =

1 x 13 =
2 x 13 =
4 x 13 =
8 x 13 =

2. O quadriculado abaixo representa a disposição retangular para o produto 7 x 13. Veja uma das possíveis decomposições de 13 para realizar essa multiplicação.



7 x 5 = 35

7 x 8 = 56

7 x 13 = 35 + 56 = 40 + 51 =

Escreva outras três possibilidades para decompor o 13 para realizar essa multiplicação.

TEXTO 6

3. Veja três estratégias diferentes para a multiplicação 7 x 8. Explique-as.

A	B	C
7 x 8 = 7 x 5 = 35 7 x 3 = 21 35 + 21 = 56	7 x 8 = 7 x 4 = 28 7 x 4 = 28 28 + 28 = 30 + 26 = 56	7 x 8 = 5 x 8 = 40 2 x 8 = 16 40 + 16 = 56

4. Calcule mentalmente os produtos e registre sua estratégia.
a) 8 x 9 = b) 8 x 16 = c) 12 x 27= d) 37 x 43 =

5. Multiplicação pela gelosia
a) 12 x 38 = b) 43 x 37 = c) 123 x 45 =

B. Estratégias de cálculo mental para a divisão

1. Para cada multiplicação, associar duas divisões:
a) 9 x 6 =
   54 : 6 = 9
   54 : 9 = 6

b) 7 x 6 =

c) 8 x 9 =

2. Associar à cada divisão a multiplicação correspondente:
a) 63 : 7 = ___ → ____ x ____ = ____
b) 45 : 5 = ___ → ____ x ____ = ____
c) 81 : 9 = ___ → ____ x ____ = ____

3. Criar estratégias de cálculo mental para as divisões:
a) 150 : 25 = b) 300 : 12 = c) 2350 : 5 =
d) 288 : 8 = e) 225 : 15 = f) 153 : 9 =
g) 1480 : 20 = h) 14.200 : 50 =

C. O uso da calculadora

O cálculo com o uso da calculadora passou a ser uma necessidade no mundo tecnológico e digital que estamos inseridos. Torna-se papel da escola, e principalmente do professor que ensina matemática ensinar os alunos a manipularem corretamente uma calculadora, já que é uma das formas de cálculo mais utilizadas nas práticas sociais. O reconhecimento de que as calculadoras sejam utilizadas na escola básica não é recente. Desde os anos de 1960, 1970, defende-se seu uso nas práticas escolares e pesquisas apontam a sua importância. As polêmicas sempre giraram em torno do momento em que as crianças deveriam ser submetidas à realização de cálculos com as calculadoras. Acreditava-se que elas necessitavam ter o pleno domínio das quatro operações básicas, manualmente, para que, somente depois, pudessem ter acesso a uma calculadora. Entretanto, pesquisas nem tão recentes (ABELLÓ, 1992; FIELKER apud ABELLÓ, 1992[1]) apontam que os três meios de cálculo: manual, mecânico e mental necessitam ser ensinados concomitantemente, com atividades específicas preparadas intencionalmente pelo professor, uma vez que cada um desses meios de cálculo contribui de forma diferenciada para a aprendizagem de cálculo pela criança. Tais pesquisas apontam as vantagens de acesso das crianças, desde cedo (Educação Infantil), às calculadoras básicas. Em primeiro lugar, porque elas possibilitam o reconhecimento de símbolos numéricos digitais que são muito diferentes dos símbolos numéricos manuais ou grafados. Nas séries iniciais, possibilita ao aluno a manipulação e operação de números "grandes", o que seria extremamente complexo para a realização no cálculo escrito. Dessa forma, os alunos, desde muito cedo passam a observar regularidades numéricas, bem como manipular símbolos numéricos "bem grandes", o que contribui para a elaboração de estimativas. Segundo Fielker (apud ABELLÒ, 1992, p. 65):

> As calculadoras estimulam as atividades matemáticas. Fazer hipóteses é um dos traços de uma atividade matemática mais aberta em que as crianças exploram os problemas numéricos com menos assistência do professor, com mais oportunidade para a tomada de decisões, e com uma maior liberdade para discutir, para identificar os problemas, para definir seus termos, para estabelecer seus próprios limites e, em geral, para trabalhar como matemáticos....

O argumento de que a utilização de calculadoras torna os alunos preguiçosos para o cálculo escrito é rebatido por pesquisadores, como ABELLÓ, (1992) que defendem que é a ausência de cálculo mental que torna os alunos preguiçosos e não o uso de calculadoras. É fundamental que situações de uso da calculadora sejam mescladas com situações de cálculo mental e cálculo manual. Assim, o aluno aprende em que situações cada meio de cálculo pode ser mais interessante que outro.

[1] ABELLÓ, Frederic Udina I. **Aritmética Y Calculadoras**. Madrid, Espanha, Editorial Síntesis, 1992.

Algumas situações com o uso da calculadora

As sugestões aqui apresentadas constituem apenas um esboço das possibilidades do uso da calculadora. O professor, à medida que vai explorando-a com seus alunos vai criando novas possibilidades.

Essas sugestões estão desvinculadas de uma proposta pedagógica. Sugerimos que elas sejam exploradas dentro de um contexto matemático para que não percam seu significado.

Usaremos apenas a calculadora simples (calculadora não científica). É importante ressaltar que existe ainda a calculadora científica (a do celular e a do computador) e a calculadora gráfica.

1ª Atividade: Explorando as teclas da calculadora.

1. Quais as teclas (excetuando as da memória) que sua calculadora possui?

2. Quais as funções de cada uma dessas teclas? Verifique para que serve cada uma delas.

2ª Atividade: Para cada item abaixo, levante a hipótese e verifique-a através da calculadora.

1. A partir de 485 que operação deve ser feita para se obter os números abaixo, com a mudança de apenas um algarismo?

a) 405? b) 4850? c) 48,5?

2. O que se deve fazer com o número 3074 para que não tenha nenhum 7? E com o 32.478.979?

3ª Atividade: Levante a hipótese e confira com a calculadora.

1. Complete com os sinais de **+** ou **- :**

a) 7 □ 3 = 10 b) 6 □ 6 = 0 c) 12 □ 6 □ 4 = 10

2. Complete com os números adequados:

a) 7 + □ = 15 b) 12 + □ - 4 = 10

3. a) Escolha três números que somem 11: 7 ♦ 2 ♦ 1 ♦ 3

b) Escolha três números que somem 19: 8 ♦ 4 ♦ 3 ♦ 8

c) A soma de 29 com 10 é mais ou menos: 20 ♦ 30 ♦ 40

d) A soma de 23 com 40 é mais ou menos: 50 ♦ 60 ♦ 80

e) A soma de 21 com 32 é mais ou menos: 40 ♦ 50 ♦ 60

4ª Atividade: Operando com constantes: Tecle na calculadora os comandos abaixo e descreva o que acontece com cada sequência obtida:

a) 1 + = = = = ...

b) 2 + = = = = ...

c) 5 + 5 = = = = = ...

d) 10 + 10 = = = = ...
e) 100 + 100 = = = = ...
f) 1 x 2 = = = = = ...
g) 1 x 7 = = = = = ...
h) 2 x = = = = = ...

5ª Atividade:

1. Use a calculadora para contar de 1 em 1, a partir do 5. Pare quando chegar no 13. Para isso, tecle os comandos:
5 + 1 = = = = ...
Quantas vezes você apertou a tecla = ?

2. Comece agora no 496. Conte de um em um, escrevendo cada número até chegar em 501.
496 + 1 = = = = ...
Quantas vezes você apertou a tecla = para chegar em 501?

3. Faça a contagem regressiva a partir do 20. Pare quando chegar no 13.
20 - 1 = = = = = ...
Quantas vezes você apertou a tecla = para chegar em 13?

4. Faça a contagem regressiva de 5 em 5 começando em 30. Pare no 0.
30 - 5 = = = = ...
Quantas vezes você apertou a tecla = ?

6ª Atividade:

1. a) Use a calculadora para contar de 5 até 31 de 2 em 2.
5 + 2 = = = = ...
b) Quantas vezes você apertou a tecla = ?
c) Confira o que você fez. Se a sua resposta acima foi 13, faça: 13 x 2 + 5 = 31. Justifique porque a expressão acima é a verificação do que você fez.

2. a) Use a calculadora para contar de 7 até 49 de 3 em 3.
7 + 3 = = = = ...
b) Quantas vezes você apertou a tecla = ?
c) Qual é a expressão que lhe permite verificar se o resultado está correto? Verifique.

3. a) Use a calculadora para contar de 15 até 100 de 5 em 5.
15 + 5 = = = = ...
b) Quantas vezes você apertou a tecla = ?
c) Qual é a expressão que lhe permite verificar se o resultado está correto? Verifique.

<u>7ª Atividade</u>: Descubra os algarismos que faltam na multiplicação abaixo. Confira o resultado com sua calculadora.

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & \square \\ \times & & \square & 2 \\ \hline & & 7 & 2 \\ 1 & 4 & \square & 0 \\ \hline 1 & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

<u>8ª Atividade:</u> Teclas quebradas.

1. A tecla de multiplicar da calculadora está quebrada. Que estratégia você usaria para calcular:

a) 378 x 2
b) 13 x 129
c) 250 x 587

Em cada caso, verifique se a sua estratégia está correta.

2) Que estratégia você usaria para calcular 273 - 129 se a tecla da subtração estivesse quebrada ? Verifique se a sua estratégia está correta.

3) Que estratégia você usaria para calcular 1.000 : 43 se a tecla da divisão estivesse quebrada ? Verifique se a sua estratégia está correta.

4) Calcular 273 + 219 sem usar a tecla de somar.

<u>9ª Atividade:</u> Estimando resultados.

Para cada situação proposta faça o seguinte:

- a estimativa do resultado, circulando-o.
- Explique que estratégia você utilizou.
- A seguir, confira o resultado na calculadora, verificando se a sua estimativa está correta.

1. Na adição 196 + 184 + 209 o resultado:
( ) menor que 600 ( ) em torno de 600 ( ) maior que 600

2. Na adição 95 + 142 + 233 o resultado:
( ) menor que 400 ( ) Em torno de 500 ( ) Maior que 500

3. Na adição 85 + 62 + 43 + 21 o resultado:
( ) menor que 200 ( ) Em torno de 200 ( ) Maior que 200.

<u>10ª Atividade:</u> Estimativas com decimais.

Para cada multiplicação abaixo faça o seguinte:

- Estime qual resultado dentro dos parênteses é o mais provável para o produto.
- Explique como você pensou.
- Verifique com a calculadora se sua estimativa está correta.

1. 5,8 x 7,2 = (0,42 4,2 42 420)
2. 13,2 x 5,1 = (0,65 6,5 65 650)
3. 8,19 x 0,673 (0,06 0,6 6 60)

11ª Atividade: Nas multiplicações abaixo está faltando um fator. Pense num número que possa ser esse fator de forma que o resultado esteja dentro do intervalo apresentado. Em seguida, use a calculadora para conferir a sua estimativa. Se ela não estiver certa, faça novas estimativas. Deixe anotadas as estimativas anteriores que você fez.

1) 8 x ...... (produto compreendido entre 125 e 150)
2) 33 x .... (produto compreendido entre 200 e 225)
3) 4,27 x ..... (produto compreendido entre 80 e 92)
4) 0,07 x .... (produto compreendido entre 50 e 55).

12ª Atividade: Explorando a memória da calculadora.

As principais teclas da memória são:

$M_+ \Rightarrow$ acrescenta na memória o número mostrado no visor

$M_- \Rightarrow$ subtrai da memória o número mostrado no visor.

MR $\Rightarrow$ Apresenta o total acumulado na memória

MC $\Rightarrow$ limpa a memória.

1. Use a memória para chegar ao resultado das expressões abaixo. Siga os comandos dados. Ao final de cada exercício, limpe a memória da calculadora antes de iniciar o próximo.

a) 16 x 7 + 17 x 6 = 214

Pressione 16 x 7 = M_+ 17 x 6 = M_+ MR

b) 55 x 5 - 44 x 4 = 99

Pressione 55 x 5 = M_+ 44 x 4 = M_- MR

2. Resolva com a calculadora as expressões abaixo:

a) 114: 19 + 104: 13 =

b) 15 x 15 + 15 - 16 x 16 + 16 =

c) 25 x 25 x 25 - 25 x 25 - 25 =

d) (627 + 84 x 17): 137 =

3. Num ano há 7 meses com 31 dias, 4 meses com 30 dias e um mês com 28 dias. Quantos dias há num ano?

4. Siga os comandos dados na primeira coluna e anote os resultados na segunda:

Teclas	Visor/registro
3 + 5 x 4 = Pressione: 3 + 5 x 4 = (sem usar a memória) Pressione: 3 M_+ 5 x 4 M_+ MR	
6 + 4 x 5 - 2 x 3 = Pressione: 6 + 4 x 5 - 2 x 3 = Pressione: 6 M_+ 4 x 5 M_+ 2 x 3 M_- MR	
20.800 - 456 x 456 + 46.953 : 999 = Cálculo sem usar a memória. Cálculo usando a memória.	

5. Assinale na segunda coluna a expressão que corresponde aos cálculos efetuados pela calculadora:

Coluna 1	Coluna 2
3 + 5 x 4 =	3 + 5 x 4 = (3 + 5) x 4
2 + 3 x 4 + 6 =	2 + 3 x (4+6) 2 + 3 x 4 + 6 (2+3)x (4+6) (2+3)x4 +6
8 - 2 x 3 + 5 - 4 =	8 - 2 x (3 + 5 - 4) (8-2) x (3+5-4) (8-2) x 3 + 5 - 4 8 - 2x3 + 5 - 4 (8-2) x (3+5) - 4